16/05/2017

Μάθημα 19ο
Αναλ4.

<u>Σύνοψη: (πεδία κλίσεων)</u> $U \subset \mathbb{R}^n$ χωρίο ή τόπος ($\Leftrightarrow$ ανοικτό και συνεκτικό). $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^n$ C πεδίο κλίσεων ($:\Leftrightarrow \exists \varphi: U \to \mathbb{R}: \nabla\varphi = \bar{f}$)

$\Leftrightarrow$ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του $\bar{f}$ κατά μήκος κ. τ.μ. C^1 καμπυλών είναι ανεξ. του δρόμου.

$\Leftrightarrow$ τα επικαμπύλια ολοκλ. του $\bar{f}$ κατά μήκος κάθε κλειστής κ. τ.μ. C^1 καμπύλης $= 0$

<u>Τότε</u>, αν $\bar{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\gamma}([a,b]) \subset U$ με $\bar{\gamma}(a) = \bar{a}$, $\bar{\gamma}(b) = \bar{x}$ έχουμε:

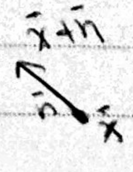
$$\boxed{\int_{\bar{\gamma}} \bar{f} \cdot d\bar{\gamma} = \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{a})}$$

<u>Συμπλήρωση στην χθεσινή απόδειξη</u> (1) $\underbrace{\int_{\bar{\gamma}} \underbrace{\bar{f}(\bar{x})}_{=\bar{b} \in \mathbb{R}^n} d\bar{\gamma}}_{=\int_0^1 \bar{b} \cdot \underbrace{\bar{\gamma}_n'}_{=\bar{\eta}}(t)\,dt = \bar{b}\cdot\bar{\eta}} = \bar{f}(\bar{x}) \cdot \bar{\eta}$

όπου $\underbrace{\bar{\gamma}_n'}(t) = \bar{x} + t\bar{\eta}$, $t \in [0,1]$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 + t\eta_1 \\ \vdots \\ x_n + t\eta_n \end{pmatrix} = \bar{\eta}$$

$$\bar{b} \cdot \bar{\eta} = \bar{f}(\bar{x}) \cdot \bar{\eta}$$



(2) $\bar{\eta} \mapsto \max\limits_{t \in [0,1]} \| \bar{f}(\bar{x} + t\bar{\eta}) - \bar{f}(\bar{x}) \| = M(\bar{\eta})$

$\Rightarrow$ (f συνεχής) $\lim\limits_{\bar{\eta} \to \bar{0}} M(\bar{\eta}) = 0$

$[\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \|\bar{y}\|<\delta : \|\bar{f}(\bar{x}+\bar{y})-\bar{f}(\bar{x})\|<\varepsilon$

$(\Leftrightarrow \bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x})$ $\Longrightarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \|\bar{y}\|<\delta\ \forall t\in[0,1] : \| \bar{f}(\bar{x}+\underbrace{t\bar{\eta}}_{\bar{y}})-\bar{f}(\bar{x})\|<\varepsilon$

$$\max_{t\in[0,1]} \|\bar{f}(\bar{x}+t\bar{\eta})-\bar{f}(\bar{x})\| =: M(\bar{\eta})$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \|\bar{\eta}\|<\delta : 0\leq M(\bar{\eta})\leq\varepsilon$

$\Longleftrightarrow \lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}} M(\bar{\eta}) = 0$

> Ως αρνητικό κριτήριο για να ελέγξουμε αν ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $\bar{f}$ είναι πεδίο κλίσεων, είναι το εξής:

Πρόταση: $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{f}: U\to\mathbb{R}^n$ C^1. Τότε, αν $\bar{f}$ πεδίο κλίσεων, τότε $D\bar{f}(\bar{x})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικός $\forall \bar{x}\in U$

Απόδειξη

$$D\bar{f}(\bar{x}) = D(\underbrace{\nabla\varphi}_{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\varphi\right)})(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}\varphi \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\varphi & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Θ. Schwarz}} \dots$$

Δύο παραδείγματα / Ασκήσεις:

Έστω $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y)$

Εξετάστε αν είναι πεδίο κλίσεων και αν ναι, βρείτε ένα δυναμικό

Λύση

Θέλω να βρω ένα $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\underbrace{\nabla\varphi(x,y,z)}_{= \left(\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}\right)(x,y,z)} = \bar{f}(x,y,z) =$

$= (x+z, -y-z, x-y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \ \dfrac{\partial\varphi}{dx}(x,y,z) = x+z \\ (2) \ \dfrac{d\varphi}{dy}(x,y,z) = -y-z \\ (3) \ \dfrac{d\varphi}{dz}(x,y,z) = x-y \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int (x+z)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2z + c(y,z)$$

$$\left[\frac{d\varphi}{dx} = x+z\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{dy}(x+y+z) = \frac{d}{dy}c(y,z) \overset{(2)}{=} -y-z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(y,z) = -\frac{y^2}{2} - 2y + \tilde{c}(z)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{y^2}{2} - 2y + \tilde{c}(z)$$

(*) Διαπιστώνουμε ότι: $D\bar{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ όντως είναι συμμετρικός.

$\Rightarrow \frac{d y}{dz} = x - y + \tilde{c}'(z) \overset{(3)}{=} x - y$

$\Rightarrow \tilde{c}'(z) = 0 \Rightarrow \tilde{c}(z) = c \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + zx - \frac{y^2}{2} - zy + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

(*)

Παράδειγμα 2: Έστω $\bar{g}(x,y,z) = (x^2y, ze^x, xy\ln z)$ στο $\{z>0\}$ $(= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z>0\})$ "U"

$\bar{g}: U \to \mathbb{R}^3$ πεδίο κλίσεων; Δυναμικό;

[Παρατήρηση: Το μέγιστο πεδίο ορισμού της $\bar{g}$ είναι το $\mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$ το οποίο δεν είναι συνεκτικό]

Λύση

$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y,z) = x^2 y \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{x^3}{3}y + c(y,z)$

$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x^3}{3} + \frac{\partial}{\partial y}c(y,z) \overset{!}{=} z e^x$ *

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}c(y,z) = ze^x - \frac{x^3}{3} \Rightarrow c(y,z) = \left(ze^x - \frac{x^3}{3}\right)y + \tilde{c}(z)$

$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{x^3}{3}y + ze^x y - \frac{x^3}{3}y + \tilde{c}(z)$

$[\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y,z) = ze^x y \overset{!}{=} x^2 y \ \text{↯}]$

$$\Big[\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = e^x y + \tilde{c}\,'(z) = xy\ln z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{c}(z) = -e^x yz + xy\left(\int \ln z\,dz + c\right) \;\; ϟ \;\Big]$$

Επειδή προκύπτει πρόβλημα στο να βρούμε δυναμικά ελέγχουμε τη συμμετρία της παραγώγου (αφού η $\bar{g}$ είναι C^∞ στο U)

$$D\bar{g}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ ze^x & 0 & e^x \\ y\ln z & x\ln z & \frac{xy}{z} \end{pmatrix}$$

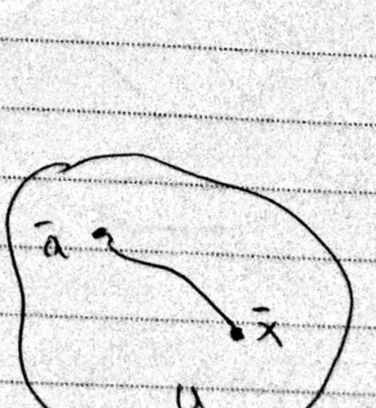
και προκύπτει ότι ο πίνακας δεν είναι συμμετρικός ενώ η $\bar{g}$ είναι C^1 και άρα δεν ισχύει η αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\bar{g}$ πεδίο κλίσεων

Η προηγούμενη αναγκαία συνθήκη μπορεί να γίνει ικανή αν το πεδίο ορισμού έχει "καλή" μορφή.

Δηλ. το πεδίο ορισμού να έχει ένα σημείο $\bar{x}_0$, έτσι ώστε για κάθε $\bar{x} \in U$, το ευθύγραμμο τμήμα $\{\bar{x}_0 + t(\bar{x} - \bar{x}_0) : t \in [0,1]\}$ να είναι $\subset U$. Τέτοια U αναφέρονται <u>αστερόμορφα</u>

Και ισχύει η πρόταση:

$$\varphi(\bar{x}) := \int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{\gamma}$$



$\bar{\gamma}(a) = \bar{a}$

$\bar{\gamma}(b) = \bar{x}$

<u>Πρόταση:</u> Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και αστερόμορφο και $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^n$ C^1 με συμμετρική παράγωγο $D\bar{f}(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in U$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $\bar{f}$ είναι πεδίο κλίσεων

<u>Παραδείγματα και ιδιότητες αστερόμορφου U (και μη)</u>

(α) $\mathbb{R}^n$ αστερόμορφο

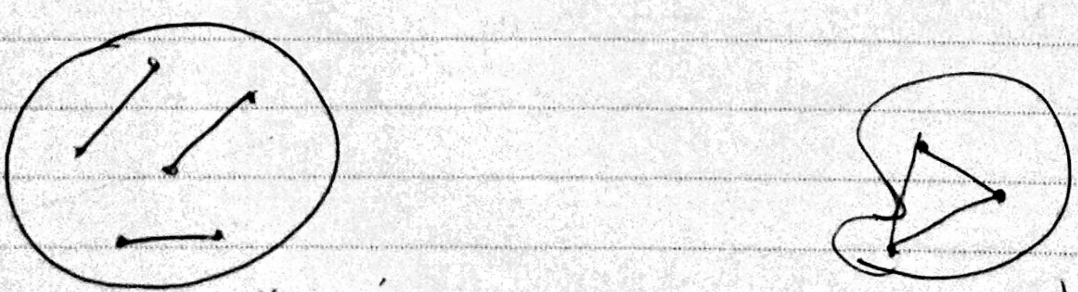
(β) Κάθε κυρτό υποσύνολο είναι αστερόμορφο

<u>Κυρτό</u> $U \subset \mathbb{R}^n :\iff \forall \bar{x}, \bar{y} \in U$:

$$\bar{x} + t(\bar{y}-\bar{x}) = \underbrace{t\bar{y} + (1-t)\bar{x}}_{\text{κυρτός συνδυασμός}} \in U \quad \forall t \in [0,1]$$

(γ) Αστερόμορφο $\Longrightarrow$ συνεκτικό ($\iff \forall \bar{x}, \bar{y} \in U$: $\exists$ πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα $\bar{x}, \bar{y}$)

[αφού για κάθε δύο $\bar{x}, \bar{y}$ μπορώ να τα ενώσω μέσω της ένωσης των ευθύγραμμων τμημάτων που ενώνουν το $\bar{x}$ με το $\bar{x}_0$ και το $\bar{x}_0$ με το $\bar{y}$]



κυρτό μη κυρτό

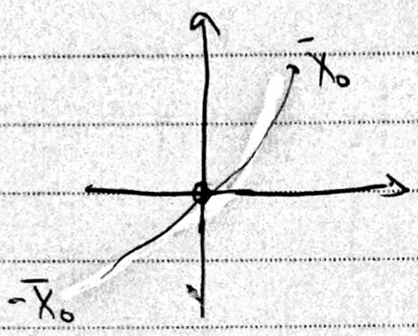
<u>πχ.</u> $U = \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$

είναι αστερόμορφο αλλά όχι κυρτό

[κυρτό $\Longrightarrow$ αστερόμορφο $\Longrightarrow$ συνεκτικό]

Παρατήρηση: Όμως, πάρα πολλά σημαντικά πεδία κλίσεων δεν ορίζονται σε αστερόμορφο U.

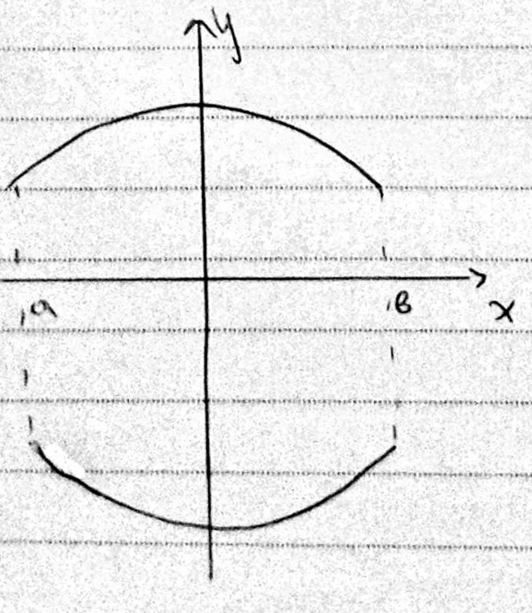
π.χ. τα $\bar{f}(\bar{x}) = \dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|^k}$, $\bar{x} \neq \bar{0}$



το $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ δεν είναι αστερόμορφο

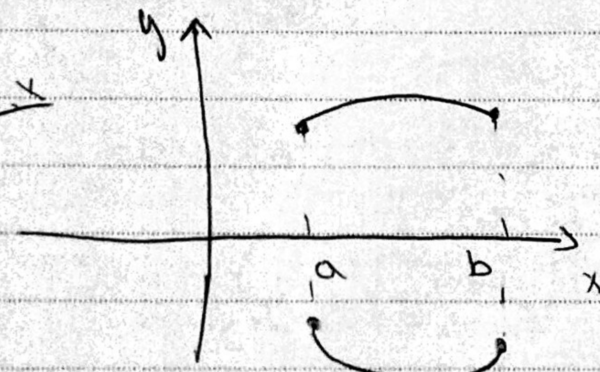
Θεώρημα Green: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα C^1-κανονικό χωρίο και ∂D το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του.
Έστω επίσης $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό με $\bar{D} \subset U$ και $\underbrace{(f_1, f_2)}_{\text{''} \bar{f}}: U \to \mathbb{R}^2$ συνεχώς διαφορίσιμη.

Τότε: $$\int_{\partial D} (f_1, f_2) \cdot d(x,y) = \underbrace{\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) d(x,y)}_{\text{διπλό (πολλαπλό) ολοκλήρωμα}}$$

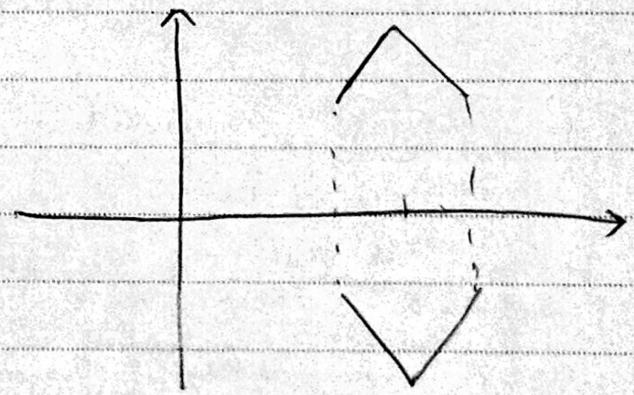


__Ορισμός:__ Ένα κανονικό χωρίο ως προς Ox,
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς.
Λέγεται C^1 - κανονικό χωρίο ως προς Ox, αν οι φ_1, φ_2 είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμες
($\Leftrightarrow$ $\exists$ διαμερίσεις $P_i = \{t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_k = b\}$ του $[a,b]$, $i = 1,2,\dots,k$, έτσι ώστε τα $\varphi_i|_{[t_{j-1}, t_j]}$ $j = 1,\dots,k$ να είναι συνεχώς διαφορίσιμη.

__π.χ__



C^1 καν. χωρίο ως προς Ox

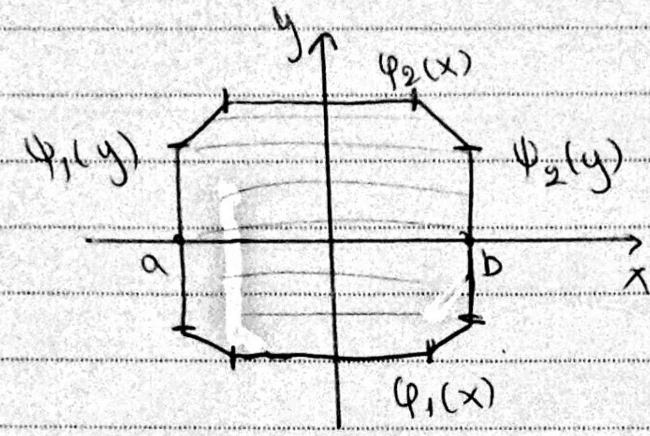


C^1 κανον. χωρίο ως προς Oy.

Αντίστοιχα για κανονικό χωρίο ως προς Oy.
και C^1 καν. χωρίο $=$ C^1 καν. χωρίο ως προς Ox ή Oy.

__Απόδειξη__
Το D είναι J-μετρ. και συμπαγές ως καν. χωρίο.
Επίσης οι $\dfrac{\partial P_2}{\partial x}, \dfrac{\partial P_1}{\partial y} : U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς $\xRightarrow{\text{Θεωρία}}$

$$\Longrightarrow \exists\ I_D = \underbrace{\int_D \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) d(x,y)}_{(*)}$$



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

$$\circledast = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,dx \right)}_{\substack{//\ \Theta.\Theta.A.\Lambda. \\ \left(f_2(\psi_2(y),y) - f_2(\psi_1(y),y)\right)}} dy - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx$$

$$I_\Delta = \int_c^d \left(f_2(\psi_1(y),y) - f_2(\psi_1(y),y) \right) dy -$$

$$- \int_a^b \left(f_1(x,\varphi_2(x)) - f_1(x,\varphi_1(x)) \right) dx$$

<u>Πόρισμα (SOS)</u>: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ όπως στο Θεώρημα Green και ∂D το θετικό προσανατολισμένο σύνορο. Τότε:

$$V(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-y, x) \cdot d(x,y)$$

Απόδειξη (Wow!)

$(f_1, f_2)(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$, Θεώρημα Green

$$\int_{\partial D} (f_1, f_2)(x,y) \cdot d(x,y) \overset{\text{Θεώρημα Green}}{=} \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = \int_D 1 = V(D)$$